II–206　B—三値論理による素項展開の考察

向　殿　政　男

A Consideration of Prime Implicant Expansion by Means of B-ternary Logic

Masao MUKAIDONO

Abstract

One of the major problems of switching theory is how to simplify switching functions or logical formulas. The usual approach for the simplification problem involves obtaining the prime implicant expansion-sum of all prime implicants-.

In the present paper we consider the prime implicant expansion of switching function through the theory of B-ternary logic. Especially by means of the theory of B-ternary logic, we describe method known as Nelson's algorithm giving the prime implicant expansion of any given switching functions.

1. まえがき

論理式 (switching formulas, Boolean expressions), または論理関数 (switching functions, Boolean functions, truth functions) の簡単化という問題は，スイッチング理論の主題であり，これまで数多くの研究が行なわれている[1)~14)]。そこで用いられてる手法のほとんどは，まず与えられた論理式の素項 (主項, prime implicant) 展開を求めるのが第一ステップで，次に，素項の中から無冗長な組み合せを見い出すものである。素項展開を求める古くから知られている代表的な手法に，Harvard[1)], M. Karnaugh[2)] および E. W. Veitch[3)] による図を用いるもの，および計算機に適した。W. V. Quine[4)] および E. J. McCluskey[5)] のものなどがある。これらの手法は，与えられた論理式をいったん主加法標準形 (特殊加法標準形，最小項表示) に展開する必要がある。主加法標準形に展開しないでよい方法には，W. V. Quine[6)] および T. H. Mott[7)] による consensus をとる手法，および R. J. Nelson[8),9)] の手法などがある。R. J. Nelson の手法は，乗法標準形 (和積形式, conjunctive form) を加法標準形 (積和形式, disjunctiue form) に，または逆に加法標準形を乗法標準形に，簡単な省略算を用いながら分配法則により展開して素項展開を求めるものである。この手法は，最近，J. R. Slagle[10)] らにより収束の早い手順に改良されている。更に，S. R. Das[11)] らは，clause-colume table を用いることにより，J. R. Slagle らの手順を改良している。

一方，従来の二値論理の真理値 0，1 に，あいまいであることを意味する真理値½を加えると，ある程度のあいまいさを取り扱かうことのできる三値論理—B—三値論理—が得られることが既に知られている[15)]。B—三値論理は，従来の二値論理を最も自然に拡張した三値論理体系で，二値論理を含むように拡張されているので，より高い立場から二値論理を眺めることができるという特徴を有している。

本論文では，B—三値論理を用いて論理式の素項展開について考察し，素項展開のいくつかの性質について述べる。特に，R. J. Nelson の手法を，B—三値論理の理論を用いて導いている。

2. 諸定義

変数 x_i，またはその否定 $\sim x_i$ を文字といい，x_i と $\sim x_i$ とは互に補元であるという。ある文字とその補元とが同時に存在しないようないくつかの文字の AND (・) を積項，OR (∨) を和項と呼ぶ。加法標準形とは，いくつかの積項の OR で構成される論理式をいい，乗法標準形とは，いくつかの和項の AND で構成される論理式をいう。

〔定義 1〕 積(和)項 α に存在するすべての文字が，積(和)項 β にも存在するとき，$\alpha \vdash \beta$ と記す。このとき，

49. 10. 20　受理

α は β を含む，または，β は α に含まれるという。

上の関係 $\vdash$ は，明らかに半順序関係をなす。α, β を積(和)項とすると，$\alpha\vdash\beta$ のとき，β は $\alpha\cdot\beta'(\alpha\vee\beta')$ と表わせるから，

(吸収法則) $\alpha\vee\alpha\cdot\beta'=\alpha$

$(\alpha\cdot(\alpha\vee\beta')=\alpha)$

が成立して β は省略できる。

〔定義 2〕 吸収法則が適用されている加（乗）法標準形，すなわち，他の積（和）項に含まれる積（和）項が存在しないよな加（乗）法標準形を既約な加（乗）法標準形と呼ぶ。

すべての論理式 Φ は，ある二値論理関数（本論文ではすべて n 変数とする）$f:V_2{}^n-V_2$（ただし，$V_2=\{0,\ 1\}$）を表現している。ある積（和）項 α が表現している二値論理関数の 1―set を α^* で表わすことにする。すなわち，α が表現する二値論理関数を f とするとき，

$\alpha^*=\{\boldsymbol{a}\in V_2{}^n \mid f(\boldsymbol{a})=1\}$。

〔定義 3〕 ある二値論理関数 f に関して，積(和)項の集合 $K(f)=\{\alpha \mid \alpha^*\subset f^{-1}(1)\}$

$(K(f)=\{\alpha \mid f^{-1}(1)\subset\alpha^*\})$

を，f が生成する積（和）項の集合という。

〔定義 4〕 $K(f)$ 内での，積(和)項における半順序関係 $\vdash$（定義1）の極大元を f の素項といい，f のすべての素項からなる加（乗）法標準形を f の加（乗）法形式の素項展開という。

B―三値論理とは，二値論理で定義されている論理演算 AND, OR, NOT(～) を，

$X\cdot Y=\min(X,\ Y)$, $X\vee Y=\max(X,\ Y)$,

$\sim X=1-X$

として三値 (0, ½, 1) まで拡張定義した論理体系で，二値論理で成立するほとんどの等式がB―三値論理でも成立する[15]が，

(相補法則) $\sim X\cdot X=0$, $\sim X\vee X=1$

が成立しないのが特徴的である。また，B―三値論理関数とは，三値 (0, ½, 1) をとる変数 $x_1,\ldots,x_n$ と，上で述べた三値まで拡張された論理演算・，∨，～との有限回の結合で構成される論理式が表現する三値論理関数をいう。よって，任意の論理式は，二値論理関数としても，また，B―三値論理関数としても見ることができる。B―三値論理では，分配法則，べき等法則が成立するから，任意のB―三値論理関数を加法形式および乗法形式に展開することができるが，相補法則が成立しないから，ある変数について肯定，否定が同時に存在するような項があり得る。このような項をそれぞれ相補積項，相補和項という。あるB―三値論理関数を F とし，F の定義域 $V_3{}^n=\{0,½,1\}^n$ のある元を $\boldsymbol{a}$ とするとき，$\boldsymbol{a}$ に存在するすべての ½ を 0 または 1 で置き換えて得られる $V_2{}^n=\{0,\ 1\}^n$ の元からなる集合を $\boldsymbol{a}^*$ で表わし，$F(\boldsymbol{a}^*)$ で，変数が $\boldsymbol{a}^*$ の元のすべてをとったとき F がとる値の集合を表わすものとする。

〔定義 5〕 元 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ と積項 α とは，次のとき互に対応していう。

α に文字 x_i が存在する $\rightleftharpoons a_i=1$

α に文字 $\sim x_i$ が存在する $\rightleftharpoons a_i=0$

α に変数 x_i が存在しない $\rightleftharpoons a_i=½$

〔定義 6〕 元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対応するそれぞれの積項を α, β とするとき，$\alpha\vdash\beta$ なるとき，およびその時に限り $\boldsymbol{a}\vdash\boldsymbol{b}$ とする。

上の対応は，明らかに一対一対応で，積項 α に対応する元を $\boldsymbol{a}$ とすれば，$\boldsymbol{a}^*=\alpha^*$ が成立している。また，積項の間の半順序関係 $\vdash$ と $V_3{}^n$ の元の間の半順序関係 $\vdash$（定義6）とは，明らかに同形である。

3. B―三値論理による素項展開の考察

既に知られている[15]B―三値論理関数のいくつかの性質について述べておこう。

〔定理 1〕 三値論理関数 F がB―三値論理関数であるための必要十分条件は

(1) $\boldsymbol{a}\in V_2{}^n \longrightarrow F(\boldsymbol{a})\in V_2$,

(2) $\boldsymbol{a}\vdash\boldsymbol{b} \longrightarrow F(\boldsymbol{a})\vdash F(\boldsymbol{b})$（証明略）。

〔系 1〕 F がB―三値論理関数ならば，

(1) $F(\boldsymbol{a})=½ \longleftarrow F(\boldsymbol{a}^*)=\{0,\ 1\}$,

(2) $F(\boldsymbol{a})=1 \longrightarrow F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$,

(3) $F(\boldsymbol{a})=0 \longrightarrow F(\boldsymbol{a}^*)=\{0\}$（証明略）。

〔系 2〕 論理式 Φ を加（乗）法標準形とする。Φ が表現するB―三値論理関数を F とすると，

$F(\boldsymbol{a})=0 \rightleftharpoons F(\boldsymbol{a}^*)=\{0\}$,

$(F(\boldsymbol{a})=1 \rightleftharpoons F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\})$（証明略）。

〔定義 7〕 B―三値論理関数 F が，

(1) $F(\boldsymbol{a})=½ \rightleftharpoons F(\boldsymbol{a}^*)=\{0,\ 1\}$,

(2) $F(\boldsymbol{a})=1 \rightleftharpoons F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$,

(3) $F(\boldsymbol{a})=0 \rightleftharpoons F(\boldsymbol{a}^*)=\{0\}$,

を満すとき，F をP形論理関数という。

真理値0, 1を確定した情報，½をあいまいな情報と解釈すれば，定理1は，入力の情報が確定すればB―三値論理関数の値も確定し，入力のあいまいさが減らなければ関数の値のあいまいさも減らないことを意味している。系1は，あいまいさを含む入力が確定したと仮定した時に取り得る関数の値が {0, 1} ならば，その入力に対する関数値は½であり，また，ある入力に対する関数値が確定ていればその入力の取り得るすべての確定した値に対して，関数値は同じ確定した値をとることを意味・

し，逆は必ずしも成立しないことを意味している。ところが，系2により，加法標準形ならば0に対して，乗法標準形ならば1に対して逆が成立する。系1で逆が成立しないということは，一般にB―三値論理ではある程度の情報が失なわれていることを意味しているが，P形論理関数は，情報損失のないB―三値論理関数ということが言える。

〔補題 1〕 論理式Φを加（乗）法形式の素項展開とし，Φが表現するB―三値論理関数をFとすると

$$F(\boldsymbol{a})=1 \rightleftarrows F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\},$$

$$(F(\boldsymbol{a})=0 \rightleftarrows F(\boldsymbol{a}^*)=\{0\})。$$

証明）加法形式について示す。$F(\boldsymbol{a})=1\rightarrow F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$は系1より明らか。逆を示そう。$\Phi$が表現する二値論理関数を$f$とする。ある元$\boldsymbol{a}$について$F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$とする。このとき，

$$\boldsymbol{a}^*\subset F^{-1}(1)\cap V_2{}^n=f^{-1}(1)$$

より，$\boldsymbol{a}$に対応する積項をαとすると，$\alpha^*=\boldsymbol{a}^*$であったから，$\alpha^*\subset f^{-1}(1)$が示される。$\Phi$は素項展開であるから定義3，4より，$\beta\vdash\alpha$，$\beta^*\subset f^{-1}(1)$なる積項$\beta$が$\Phi$に存在する（$\beta=\alpha$ということも有りうる）$\beta$に対応する元を$\boldsymbol{b}$とすると明らかに$F(\boldsymbol{b})=1$。$\boldsymbol{b}\vdash\boldsymbol{a}$であるから定理1(2)より，$F(\boldsymbol{a})=1$が導かれる。乗法形式の場合も同様である。（証明終）

〔系 3〕 論理式Φを加(乗)法形式の素項展開とすると，Φが表現しているB―三値論理関数はP形論理関数である。

証明）Φが表現するB―三値論理関数をFとすると，系2および補題1より

$$F(\boldsymbol{a})=0 \rightleftarrows F(\boldsymbol{a}^*)=\{0\},$$

$$F(\boldsymbol{a})=1 \rightleftarrows F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$$

が示され，必然的に

$$F(\boldsymbol{a})=1/2 \rightleftarrows F(\boldsymbol{a}^*)=\{0, 1\}$$

が導かれるから，定義7よりFはP形論理関数である。

（証明終）

〔定理 2〕 論理式Φが加(乗)法形式の素項展開であるための必要十分条件は，Φが既約な加(乗)法標準形であり，表現するB―三値論理関数がP形論理関数であることである。

証明）必要条件は，定義3,4および系3より明らか。逆を示そう。Φが表現する二値論関数をf，B―三値論理関数をFとする。いま，Φを既約な加法標準形でFがP形論理関数であるとする。このとき，fの素項はすべてΦに存在する。なぜならば，もしfのある素項αがΦになかったとすると，αに対応する元を$\boldsymbol{a}$とすると$F(\boldsymbol{a})\neq1$。しかし，αがfの素項ならば$F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$であるからこれは$F$がP形論理関数であることに矛盾する。また，$\Phi$は既約は加法標準形であるから，$\Phi$には$f$の素項以外に存在しえない。よって，定義4より$\Phi$は素項展開である。$\Phi$が乗法標準形の場合にも同様。（証明終）

定理2により，素項展開を求める問題は，B―三値論理関数として見たときP形論理関数であるような既約な加(乗)法標準形を求める問題に帰着させられ，次のような素項展開を求める手法が得られる。

素項展開を求める手法：ある二値論理関数fを表現している論理式が乗（加）法標準形で与えられているとする。この式を省略算

(i) （相補法則） $\sim x\cdot x=0$ $(\sim x\vee x=1)$,

(ii) （べき等法則） $x\cdot x=x$ $(x\vee x=x)$,

(iii) （吸収法則） $\alpha\cdot\beta\vee\alpha=\alpha$

$((\alpha\vee\beta)\cdot\alpha=\alpha)$

を用いながら，分配法則を用いて加(乗)法標準形に展開する。こうして得られた式は，fの加(乗)法形式の素項展開である。

この手法は，既に記号論理の言葉を用いてR. J. Nelson[8),9)]により得られているものであるが，定理2から，B―三値論理によっても示すことができる。すなわち，Φを乗法標準形で与えられた論理式とする。Φが表現するB―三値論理関数Fは，系2より

$$F(\boldsymbol{a})=1 \rightleftarrows F(\boldsymbol{a}^*)=\{1\} \qquad (1)$$

を満す。ΦをB―三値論理の式として，すなわち相補法則が成立しないとして，省略算(ii)，(iii)を用いて分配法則により加法形式に展開する。このとき，一般に相補積項が生ずる。この相補積項を除去して，すなわち，省略算(i)を施こして得られる式（既約な加法標準形になっている）をΦ'とし，Φ'が表現するB―三値論理関数をF'とする。相補積項の除去は，B―三値論理関数の1―Setには影響を与えないから，(1)式より

$$F'(\boldsymbol{a})=1 \rightleftarrows F'(\boldsymbol{a}^*)=\{1\}$$

が保たれる。一方，Φ'は加法標準形であるから，系2より

$$F'(\boldsymbol{a})=0 \rightleftarrows F'(\boldsymbol{a}^*)=\{0\}$$

が成式し，Φ'は既約は加法標準形で，F'はP形論理関数となり，定理2からΦ'は素項展開ということになる。Φが加法標準形で与えられている場合も同様である。Φ'が表現する二値論理関数は明らかにfに等しいから，fの素項展開が上述の手法で得られることになる。

〔系 4〕 論理式Φを既約な加(乗)法標準形とする Φを省略算(ii)，(iii)のみを用いて，すなわち，相補法則が成立しないとして乗（加）法標準形に展開したとき，相補和（積）項が生じないならば，Φは加（乗）法形式の素項展開である。逆も成立する。

証明）相補法則が成立しないということは，ΦをB―三

値論理の式として見て展開したことになる。これが表現するB—三値論理関数をFとする。加法標準形で与えられれば，

$$F(a)=0 \iff F(a^*)=\{0\}。$$

一方，乗法形式に展開して相補和項が生じないということは，乗法標準形になっている訳であるから

$$F(a)=1 \iff F(a^*)=\{1\}。$$

よって，FはP形論理関数であるから，定理2よりΦは加法形式の素項展開である。乗法形式の場合も同様である。　(証明終)

〔系 5〕 既約な加(乗)法標準形Φにおいて，すべての変数について補元が存在しなければ，Φは加(乗)法形式の素項展開である。

証明) すべての変数について補元が存在しないならば，ΦをB—三値論理の式として乗(加)法形式に展開したとき，相補和(積)項は生じないから系4よりΦは素項展開である。　(証明終)

〔定理 3〕 論理式Φ_1, Φ_2をそれぞれ加(乗)法形式の素項展開とする。$\Phi_1\cdot\Phi_2(\Phi_1\vee\Phi_2)$を省略算(i), (ii), (iii)を用いて加(乗)法標準形に展開して得られる式は，加(乗)法形式の素項展開である。

証明) Φ_1, Φ_2および$\Phi_1\cdot\Phi_2$が表現するB—三値論理関数をそれぞれF_1, F_2および$F_3(=F_1\cdot F_2)$とする。Φ_1, Φ_2は素項展開であるから系3よりF_1, F_2はそれぞれ

$$F_i(a)=1 \iff F_i(a^*)=\{1\},\quad i=1, 2。$$

よって

$$F_3(a)=1 \iff F_3(a^*)=\{1\} \tag{2}$$

が得られる。$\Phi_1\cdot\Phi_2$を省略算(i), (ii), (iii)に従って加法標準形に展開して得られる式が表現するB—三値論理関数をF_3'とする。上述した素項展開を求める手法のB—三値論理による説明と同様に，相補積項の除去はB—三値論理関数の 1—Set に影響をおよぼさないから，

(2)式より

$$F_3'(a)=1 \iff F_3'(a^*)=\{1\}$$

が保持される。一方，得られた式は既約な加法標準形になっているから，系2より，

$$F_3'(a)=0 \iff F_3'(a^*)=\{0\}。$$

よって，F_3'はP形論理関数であるから，定理2より加法形式の素項展開が得られる。乗法標準形の場合も同様。　(証明終)

〔系 6〕 論理式Φを加(乗)法形式の素項展開，αを和(積)項とする。$\Phi\cdot\alpha(\Phi\vee\alpha)$を省略(i), (ii), (iii)算を用いて加(乗)法標準形に展開して得られる式は，加(乗)法形式の素項展開である。

証明) 和(積)項はすべて加(乗)法形式の素項展開であるから，定理3より導かれる。　(証明終)

4. むすび

B—三値論理を用いて，二値論理関数の素項展開のいくつかの性質を明らかにした。

本論文は，電子通信学会オートマトン研究会における草稿[16]に修正加筆したもので，熱心にご検討下さった研究会の方々に感謝致します。最後に，日ごろ，御指導いただく本学後藤以紀教授，電子技術総合研究所駒宮安男電子デバイス部長，長田正情報制御研究室長に感謝致します。

文　献

1) Harvard Computation Lab.: "Synthesis of electronic computing and control circuits", Ann. the Computation Laboratory, Harvard University Press, Cambridge, Vol. 27 (1951).

2) E. W. Veitch: "A chart method for simplifying truth functions", Proc. Ass. Comput. Mach. conference, Pittsburgh, p. 127 (May 1952).

3) M. Karnaugh: "The map method for synthesis of combinational logic circuits", Trans. AIEE, Commun. Electron., Vol. 72, p. 593 (Nov. 1953).

4) W. V. Quine: "The problem of simplifying truth functions", Amer. Math. Mon., Vol. 59, p. 521 (Oct. 1952).

5) E. J. McCluskey: "Minimization of Boolean functions", Bell Syst. Tech. J., Vol. 35, p. 1414 (Nov. 1956).

6) W. V. Quine: "A way to simplify truth functions", Amer. Math. Mon., Vol. 62, p. 627 (Nov. 1955).

7) T. H. Mott: "Determization of the irredundant normal forms of a truth function by iterated consensus of the prime implicants", Trans. IRE, Electronic Computers, Vol. EC-9, p. 245 (June 1960).

8) R. J. Nelson: "Simplest normal trnth functions", J. Symbolic Logic, Vol. 20, p. 105 (June 1955).

9) R. J. Nelson: "Weak simplest normal truth furctions", J. Symbolic Logic, Vol. 20, p. 232 (Sep. 1955).

10) J. R. Slagle, C. L. Chang and R. C. T. Lee: "A rew algorithm for generating prime implicant", Trans. IEEE, Comput., Vol. C-19, p. 304 (Apr. 1970).

11) S. R. Das and N. S. Khabra: "Clause-calum table approach for generating all the prime implicants of switching functions", Trans. IEEE, Comput., Vol. C-21, p. 1239 (Nov. 1972).

12) M. J. Gazale: "Irredundant disjunctive and conjunctive forms of a Boolean function", IBM J. Vol. 1, p. 171 (April 1957).

13) W. V. Quine: "On cores and prime implicants of truth functions", Amer. Math. Mon., Vol. 66, p. 755

(Nov. 1959).
14) S. R. Das: "Comments on a rew algorithm for generating prime implicant", Trans. IEEE, Compt. (Corresp.), Vol. C-20, p. 1614 (Dec. 1971).
15) 向殿政男："B一三値論理関数について", 電子通信会論文誌D, 55-D, 6, p. 335 (1972—6).
16) 向殿政男："B一三値論理関数による素項展開の求め方", 電子通信学会オートマトン研究会資料, A70-88 (1971—3).